

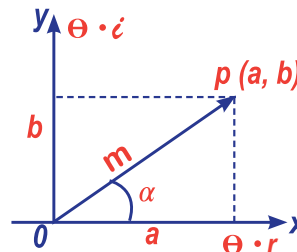
NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es un par ordenado de números reales. Se simboliza por $C = R \times R$. Dos números complejos (a, b) y (c, d) son iguales cuando se verifica: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

AFIJO Y MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO.

El punto $p(a, b)$ se llama afijo del número complejo (a, b) . La longitud del vector $\overrightarrow{OP}$, se llama módulo del número complejo $z = (a, b)$, cuyo valor lo representamos:

$$m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



El ángulo α se llama **argumento** del número complejo $z = (a, b)$

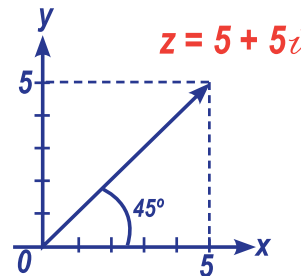
$$\text{Sen } \alpha = \frac{b}{m} ; \cos \alpha = \frac{a}{m} ; \text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$$

Ejemplos:

1. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = 5 + 5i$. Representarlo gráficamente.

$$\text{Módulo } m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{Argumento : } \text{tg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

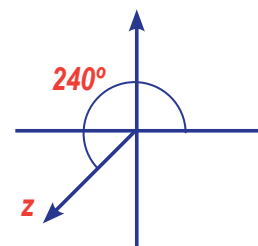


2. Calcular el módulo y argumento del número complejo $z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. Representarlo gráficamente.

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 240^\circ$$



3. Efectuar la operación siguiente:

$$z_1 + z_2 = (3 - 4i) - (-5 + 7i) = (3 - 5) + (-4 + 7)i = -2 + 3i$$

4. Efectuar la operación siguiente:

$$z_1 - z_2 = (4 + 2i) - (-1 + 3i) = [4 - (-1)] + (2 - 3)i = 5 - i$$

5. Efectuar la operación $z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 + 3i - 4i + 2 = 8 - i$

6. Calcular el módulo de producto $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -2i(1 + i)(3 + i)$

$$\text{Módulo de } z_1; m_1 = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Módulo de } z_2; m_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Módulo de } z_3; m_3 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Módulo de } z_1 \cdot z_2 \cdot z_3; m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

7. Hallar a y c para que el producto: $z_1 \cdot z_2 = (a + 3i)(c - 2i)$ sea igual a $12i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + 3i)(c - 2i) = ac + 3ci - 2ai + 6 = (ac + 6) + (3c - 2a)i = 12i$$

$$\begin{cases} ac + 6 = 0 \\ 3c - 2a = 12 \end{cases} \Rightarrow a = -3; c = 2$$



ACTIVIDAD

En parejas:

A. Demuestren las soluciones de los problemas siguientes:

1. Calculen el módulo y argumento del número complejo $z = 1 - i\sqrt{3}$ representarlo gráficamente.

Solución: $m = 2; \alpha = 300^\circ$

2. Efectuen las operaciones siguientes:

a. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(3 - 4i)$

Solución: $z_1 \cdot z_2 = 25$

b. $z_1 \div z_2 = (1 + 3i) \div (2 + i)$

Solución: $z_1 \div z_2 = 1 + i$

c. $z_1 \div z_2 = (3 - 2i) \div (2 - 3i)$

Solución: $z_1 \div z_2 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

3. Hallen c con la condición de que el producto:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(c + i) \text{ sea un número real}$$

Solución: $c = -2$

4. Hallen el módulo de: $\frac{(3 + 2i)(1 - i)}{(4 + i)(2 - i)}$

Solución: $m = \sqrt{\frac{26}{85}}$

5. Hallen a y b para que sea: $\frac{a - 3i}{2 + bi} = 3 - 2i$

Solución: $a = \frac{20}{3}$; $b = \frac{1}{3}$

B. Calculen el módulo y argumento de $z = -4 + 5i$. Representarlo gráficamente.

C. Calculen el módulo y el argumento de $z_1 \cdot z_2$, donde $z_1 = 3i$ y $z_2 = 1 + i$

D. Encuentren $z_1 \cdot z_2$ y z_1 / z_2 .

a) Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 3i$

b) Si $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$

c) Si $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 - 7i$

EXPRESIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Todo número complejo puede adoptar diversas formas:

I. Forma real: $z = (a + bi)$

II. Forma binómica: $z = a + bi$. Siendo $i = (0.1)$

III. Forma trigonométrica: $z = m (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

IV. Forma polar: $z = (m, \alpha) = m \angle \alpha$

NÚMEROS COMPLEJOS CERO, CONJUGADOS Y OPUESTOS

Forma real

Número complejo cero: $z = (a, b) = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Números complejos conjugados: $z_1 = (a, b)$; $z_2 = (a, -b)$

Números complejos opuestos: $z_1 (a, b)$; $z_2 (-a, -b)$

Forma binómica

Número complejo cero: $z = a + bi \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Números complejos conjugados: $z_1 = a + bi$; $z_2 = a - bi$

Números complejos opuestos: $z_1 = a + bi$; $z_2 = -a - bi$

Forma trigonométrica

Número complejo cero: $z = m (\cos \alpha + i \sin \alpha) \iff m = 0$

Números complejos conjugados: $z_1 = m_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$;
 $z_2 = m_2 [\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)]$ siendo: $m_1 = m_2$; $\alpha = -\alpha$]

Números complejos opuestos

$z_1 = m_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$; $z_2 = m_2 (\cos \theta + i \sin \theta)$, siendo: $m_1 = m_2$; $\alpha = \theta + n$ ó $\alpha = \theta + (2k + 1)\pi$

Forma polar

Número complejo cero: $z = m \angle \alpha \iff m = 0$

Números complejos conjugados: $z_1 = m_1 \angle \alpha$; $z_2 = m_2 \angle (-\alpha)$, siendo: $m_1 = m_2$

Números complejos opuestos

$z_1 = m_1 \angle \alpha$; z_2 siendo: $m_1 = m_2$; $\alpha = \theta + n$ ó $\alpha = \theta + (2k + 1)\pi$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1. Adición

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i$$

2. Diferencia

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$
$$(a + b i) - (c + d i) = (a - c) + (b - d) i$$

3. Multiplicación

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$(a + b i)(c + d i) = (ac - bd) + (ad + bc) i$$
$$m(\cos \alpha + i \sin \alpha) m^1(\cos \beta + i \sin \beta) =$$
$$mm^1 [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$
$$m_{\alpha} m_{\beta} = m_{\alpha + \beta}$$

4. Cociente

$$(a, b) \div (c, d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

$$(a + b i) \div (c + d i) = \frac{a + b i}{c + d i} \cdot \frac{c - d i}{c - d i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$$\frac{m(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{m^1(\cos \beta + i \sin \beta)} = \frac{m}{m^1} [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] m_{\alpha} \div m_{\beta}^1 = \left(\frac{m}{m^1} \right)_{\alpha - \beta}$$

Ejemplos:

1. Hallar un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

$$(a + b i)^2 = a - b i$$

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab i - b^2 &= a - b i \\ a^2 - b^2 + 2ab i &= a - b i \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{b}{2b} = -\frac{1}{2}$$

$$b^2 = a^2 - a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluciones:

$$1^a \ z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$2^a \ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

2. Hallar dos números complejos z_1 y z_2 , tales que su suma sea $5 + 5i$; su cociente imaginario puro y la parte real de z_2 sea 3.

$$z_1 = a + bi; z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 5 + 5i$$

$$z_1 \div z_2 = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Por tanto, podemos escribir

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 5 \\ b + d = 5 \\ ac + bd = 0 \\ c = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow c = 3; a = 2; b = \left\{ \begin{array}{l} b_1 = -1 \\ b_2 = -6 \end{array} \right. ; d = \left\{ \begin{array}{l} d_1 = -6 \\ d_2 = -1 \end{array} \right.$$

Soluciones:

$$1^a \quad z_1 = 2 - i; \quad z_2 = 3 + 6i$$

$$2^a \quad z_1 = 2 + 6i; \quad z_2 = 3 - i$$

3. Demuestra que los números complejos conjugados $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$, son raíces de la ecuación: $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$z_1 = 2 + i = x_1; z_2 = 2 - i = x_2$$

$$(2 + i)^2 - 4(2 + i) + 5 = 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0$$

$$(2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 = 4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 = 0$$

Luego los números complejos z_1 y z_2 satisfacen la ecuación.

4. El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es real y vale 5. El módulo del dividendo es el doble del módulo del divisor. Hallar estos números.

$$z_1 = a + bi; z_2 = c + di$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = 5$$

$$m_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} ac + bd = 0 \\ a + c = 5 \\ b + d = 0 \\ a^2 + b^2 = 4(c^2 + d^2) \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4; b = \pm 2; c = 1; d = \pm 2$$

Soluciones:

$$1^a \quad z_1 = 4 + 2i; \quad z_2 = 1 - 2i$$

$$2^a \quad z_1 = 4 - 2i; \quad z_2 = 1 + 2i$$

5. Poner en forma binómica la expresión siguiente:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}-i\sqrt{b}} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}+i\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-i\sqrt{b})(\sqrt{a}+i\sqrt{b})} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}+i\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (i\sqrt{b})^2} = \frac{(a+b)(\sqrt{a}+i\sqrt{b})}{a+b} = \sqrt{a}+i\sqrt{b}$$

Solución:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}-i\sqrt{b}} = \sqrt{a}+i\sqrt{b}$$

6. Expresar el número complejo $z = 2 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ en forma binómica.

$$\cos 270^\circ = 0; \sin 270^\circ = -1$$

$$z = 2 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = 2 (0 - i) = -2i$$

Solución: $z = 2 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i$

7. Expresar el número complejo $z = 1 + i$ en forma trigonométrica.

$$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$Z = 1 + i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

8. Expresar el número complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ en forma polar.

$$|z| = m = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Solución: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = (1, 60^\circ) = 1_{60^\circ}$



ACTIVIDAD

En parejas demuestren las soluciones de los problemas siguientes:

1. Hallen dos números complejos z_1 y z_2 , tales que su suma sea $1 + 4i$ y cuyo cociente sea i .

Solución: $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i; \quad z_2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i;$

2. La diferencia de dos números complejos vale 1, el módulo del minuendo es $4\sqrt{2}$ y el del sustraendo 5. Hallen los dos números complejos.

Solución: $1^a \quad z_1 = 4 + 4i; \quad z_2 = 3 + 4i \quad 2^a \quad z_1 = 4 - 2i; \quad z_2 = 1 + 2i$

3. Pongan en forma binómica la expresión siguiente:

$$\frac{(4 + i)^2 - (4 - i)^2}{(4 + i)^2 + (4 - i)^2} \quad \text{Solución: } \frac{8}{15}i$$

4. Expongan el número complejo $z = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ en forma binómica.

Solución: $-4\sqrt{3} - 4i$

5. Efectúen la operación siguiente y pongan el resultado en forma trigonométrica.

$$(4 + 4\sqrt{3}i)(3\sqrt{3} + 3i) \quad \text{Solución: } z = 48i = 48 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

6. Efectúen la operación siguiente, poniendo el resultado en forma trigonométrica y binómica.

$$z_1 \cdot z_2 = 2 (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \cdot 3 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

Solución: $z_1 \cdot z_2 = 6 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 6i$

7. Efectúen la operación siguiente, poniendo el resultado en forma trigonométrica y binómica.

$$\frac{5 + 2i}{3 - i} (1 - 2i)$$

Solución: $\frac{5 + 2i}{3 - i} (1 - 2i) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i = \frac{\sqrt{58}}{2} (\cos 336^\circ 50' + i \sin 336^\circ 50')$

8. Expresen el número complejo $z = -4 - 4\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica.

Solución: $8 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

9. Expresen el número complejo $z = 1 + i\sqrt{3}$ en forma trigonométrica.

Solución: $2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

10. Dados los números complejos $z_1 = 2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ y $z_2 = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

Hallen:

Soluciones:

- a) El producto $z_1 z_2$
b) El cociente $z_1 \div z_2$
c) El cociente $z_2 \div z_1$

- a) $16 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$
b) $1/4 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$
c) $4 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

11. Efectúen la operación siguiente y escriban el resultado en forma trigonométrica.

$$\frac{1 + 3i}{2 + i}$$

Soluciones: $1 + i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

12. Calculen a y b para que $(a^2 - b^2) + 2ab i$ sea conjugado de $8 + 6i$.

Soluciones: $a_1 = 3 ; b_1 = 1$
 $a_2 = -3 ; b_2 = 1$

13. La suma de dos números complejos $z_1 + z_2 = 6$; el módulo de $|z_1| = \sqrt{13}$ y el de $|z_2| = 5$

Hallen:

Soluciones:

- a) Los complejos $1^a \quad z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 4 - 3i$
 $2^a \quad z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 4 + 3i$
- b) Sus productos $z_1 \cdot z_2 = 17 + 6i$
 $z_1 \cdot z_2 = 17 - 6i$
- c) Sus cocientes $z_1 \div z_2 = -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$
 $z_1 \div z_2 = -\frac{1}{25} - \frac{18}{25}i$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$$i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1, \dots$$

$$i^n = i^{4c+r} = i^r; \text{ siendo } i^n \Rightarrow \left[\begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right] \Rightarrow i^n = i^r$$

POTENCIA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$I. \quad z^n = (a + bi)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} (bi) + \dots + \binom{n}{n} (bi)^n, \text{ siendo } n \in \mathbb{N}$$

$$II. \quad z^n = [m(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = m^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \text{ Fórmula de MOIVRE.}$$

$$III. \quad z^n = (m_\alpha)^n = m_{\alpha n}^n$$

Ejemplos:

- 1) Calcular las potencias.

$$a. \quad (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$b. \quad (5 + 2i)^3 = 125 + 3 \cdot 5^2 \cdot 2i + 3 \cdot 5 \cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 125 + 150i - 60 - 8i = 65 + 142i$$

- 2) Calcular $(1 + i\sqrt{3})^4$ por la fórmula Moivre.

$$z = 1 + i\sqrt{3}; |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = [2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)]^4 = 2^4 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 16 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -8 - 8\sqrt{3}i$$

- 3) Calcular la operación siguiente, expresando el resultado en forma polar, trigonométrica y binómica:
 $(2, 30^\circ)(5, 30^\circ)$

$$(2, 30^\circ)(5, 30^\circ) = (10, 60^\circ) = 10(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 5 + 5\sqrt{3}i$$

Solución: $(2, 30^\circ)(5, 30^\circ) = (10, 60^\circ) = 10_{60} = 10(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 5 + 5\sqrt{3}i$

4) Calcular $(\sqrt{3} - i)^{10}$ por la fórmula de Moivre.

$$z = \sqrt{3} - i; |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2; \quad \text{Tg } \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 330^\circ$$

$$(3 - i)^{10} = [2 (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)]^{10} = 2^{10} (\cos 3300^\circ + i \sin 3300^\circ) =$$

$$1024 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1024 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 512 + 512\sqrt{3}i$$

5) Calcular $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)$; expresado el resultado en forma polar y binómica.

$$z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

$$\text{Tg } \alpha = \frac{3/2}{3\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)^3 = (3, 30^\circ)^3 = (27, 90^\circ) = 27 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 27 (0 + i) = 27i$$



ACTIVIDAD

En grupos de tres alumnos (as)

A. Demuestren las soluciones a los problemas planteados.

1) Calculen las potencias:

a) $(4 - i)^2$

Solución: $15 - 8i$

b) $(3 + 7i)^3$

Solución: $-414 - 154i$

2) Calculen $(-1 + i)^{10}$ por la fórmula de Moivre.

Solución: $-32i$

3) Calculen: $(\sqrt{3} - i)^5$ expresando el resultado en forma polar y binómica.

Solución: $(2, 330^\circ)^5 = (32, 1650^\circ) = -16\sqrt{3} - 16i$

B. Calculen las operaciones siguientes, expresando el resultado en forma polar, trigonométrica y binómica.

a) $(10, 45^\circ) \div (2, 15^\circ)$

b) $(1, 30^\circ)^5$

c) $(2, 120^\circ)^6$

C. Demuestren por la fórmula de Moivre el valor del $\cos 3\alpha$ y $\sin 3\alpha$.

D. Calculen el valor de i^{1787} .

E. El complejo $z_1 = 3 - 2i$ es una raíz de una ecuación de segundo grado. Hallen la otra raíz y su ecuación.

RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$I. \quad \sqrt{a + b i} = x + y i \iff a + b i (x + y i)^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\text{Entonces } x = \pm \sqrt{\frac{m+a}{2}}; y = \pm \sqrt{\frac{m-a}{2}}, \text{ siendo } m = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\text{Luego: } \sqrt{a + b i} = \pm \sqrt{\frac{m+a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{m-a}{2}}$$

$$II. \quad \sqrt{m (\cos \alpha + i \sin \alpha)} = r (\cos \beta + i \sin \beta) \iff m (\cos \alpha + i \sin \alpha) = [r (\cos \beta + i \sin \beta)]^2 =$$

$$r^2 (\cos 2\beta + i \sin 2\beta), \text{ luego}$$

$$\begin{cases} m = r^2 \\ \alpha = 2\beta + 2kn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{m} \\ \beta = \frac{\alpha + 2kn}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \\ K = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} + n \end{cases}$$

De donde:

$$\sqrt{m (\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \sqrt{m} \left(\frac{\cos \alpha + 2kn}{2} + i \sin \frac{\alpha + 2kn}{2} \right)$$

$$III. \quad \sqrt{m_\alpha} = \frac{\sqrt{m_{\alpha+2kn}}}{2} \Rightarrow \begin{cases} K = 0 \Rightarrow (\sqrt{m})_{\alpha/2} \\ K = 1 \Rightarrow (\sqrt{m})_{\alpha/2+n} \end{cases}$$

RAÍZ N-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$\sqrt[n]{m_\alpha} = r_\beta \iff m_\alpha = [r_\beta]^n = (r^n)_{n\beta}$$

$$\begin{cases} \text{Luego: } r^n = m \\ n\beta = \alpha + 2kn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{m} \\ \beta = \frac{\alpha + 2kn}{n} \end{cases} \quad \text{de donde: } \sqrt[n]{m_\alpha} = \sqrt[n]{m} \frac{\alpha + 2kn}{n}$$

Dando a K los valores 0, 1, 2, ... n - 1, se obtienen las n raíces del número complejo.

Ejemplos:

1) Expresar en forma binómica: $\sqrt{i}$

$$\sqrt{i} = a + b i \Rightarrow i = (a + b i)^2 = a^2 - b^2 + 2ab i$$

De donde:

$$\begin{cases} 0 = a^2 - b^2 \\ 1 = 2ab \end{cases} \Rightarrow a = \pm b, \text{ para } \begin{cases} a = -b, \text{ resulta: } 1 = -2a^2 : \text{Imposible} \\ a = b, \text{ resulta: } a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = b \end{cases}$$

$$\text{Solución: } \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \text{y} \quad \sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

2) Hallar en forma binómica: $\sqrt{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1+1/2}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1-1/2}{2}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2} i$$

Solución: 1ª $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$; 2ª $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

3) Efectuar la operación siguiente: $2 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6$

$$2 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^6 = 2^6 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2^6 (0 + i) = 64 i$$

4) Hallar un número complejo tal que sumándolo con $\frac{1+i}{2-2i}$ de otro número complejo de módulo $\sqrt{2}$ y argumento 45° .

$$(a + b i) + \frac{1+i}{1-2i} = (\sqrt{2}, 45^\circ)$$

$$(a + b i) + \frac{1+i}{1-2i} = (a + b i) + \frac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = (a + b i) + \frac{i}{2} = a + \left(b + \frac{1}{2}\right) i$$

$$(\sqrt{2}, 45^\circ) = 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

Luego:

$$a + \left(b + \frac{1}{2}\right) i = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución: $(a + b i) = 1 + \frac{1}{2} i$

5) Hallar el valor de b en la expresión $\frac{2+b i}{1+b i}$, para que el módulo del cociente que resulte sea igual a 2.

Sea: $z_1 = 2 + b i$; $z_2 = 1 + b i$

$$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + b^2} = \sqrt{4 + b^2}; \quad |z_2| = \sqrt{1^2 + b^2}$$

Luego: $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{4+b^2}}{\sqrt{1+b^2}} = 2 \Rightarrow \frac{4+b^2}{1+b^2} = 4 \Rightarrow 4+b^2 = 4+4b^2 \Rightarrow 3b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$

Solución: $b = 0$

6) Hallar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son $2 + i$; $2 - i$

$$[x - (2 + i)][x - (2 - i)] = 0 \Rightarrow [(x - 2) - i][(x - 2) + i] = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 - i^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

- 7) Hallar las raíces de $\sqrt[3]{8}$, expresando los resultados en forma polar, trigonométrica y binómicas.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(8, 0^\circ)} = \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = 2_{0^\circ} = 2 \frac{\alpha + 2kn}{3}$$

$$\text{Para } \begin{cases} k = 0 \Rightarrow (2, 0^\circ) = 2 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 2 \\ k = 1 \Rightarrow (2, 120^\circ) = 2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3} \\ k = 2 \Rightarrow (2, 240^\circ) = 2 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

- 8) Hallar en forma polar $\sqrt[3]{27 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$

$$\sqrt[3]{27 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)} = \sqrt[3]{(27, 60^\circ)} = \sqrt[3]{27_{60^\circ}} = 3 \frac{60^\circ + 2kn}{3} \Rightarrow (3, 20^\circ) = 3_{20^\circ}; (3, 140^\circ) = 3_{140^\circ}; (3, 260^\circ) = 3_{260^\circ}$$

- 9) Calcular trigonómicamente $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2}$

$$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{módulo: } |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \text{argumento: } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{4} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(\cos \frac{n}{4} + i \sin \frac{n}{4} \right) \textcircled{1}$$

Elevando $\textcircled{1}$ al cuadrado resulta:

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = \left[2 \left(\cos \frac{n}{4} + i \sin \frac{n}{4} \right) \right]^2 = 4 \left(\cos \frac{n}{2} + i \sin \frac{n}{2} \right)$$

$$\text{Luego: } \sqrt[3]{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{4 \cos \frac{n}{2} + i \sin \frac{n}{2}} = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{n/2 + 2kn}{3} + i \sin \frac{n/2 + 2kn}{3} \right)$$

$$\text{Para } \begin{cases} k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{n}{6} + i \sin \frac{n}{6} \right) \\ k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{5n}{6} + i \sin \frac{5n}{6} \right) \\ k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{9n}{6} + i \sin \frac{9n}{6} \right) \end{cases}$$

- 10) Resolver la ecuación $(x + i)^4 - (x - i)^4 = 0$

$$(x + i)^4 = x^4 + 4x^3i - 6x^2 - 4xi + 1$$

$$(x - i)^4 = x^4 - 4x^3i - 6x^2 + 4xi + 1$$

$$(x + i)^4 - (x - i)^4 = 8x^3i - 8xi = 0 \Rightarrow 8xi(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$



ACTIVIDAD

En parejas: demuestren las soluciones de los problemas siguientes:

- 1) Calculen: $\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}$ **Solución:** $4; 2i; -2i; -4$
- 2) Hallen todas las raíces de la ecuación: $Z^4 + 81 = 0$, **Solución:** $3_{45^\circ}; 3_{135^\circ}; 3_{225^\circ}; 3_{315^\circ}$
- 3) Calculen: $\sqrt[3]{-i}$ **Solución:** $1_{90^\circ}; 1_{210^\circ}; 1_{330^\circ}$
- 4) Calculen: $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$ **Solución:** $\sqrt[4]{2}_{30^\circ}; \sqrt[4]{2}_{120^\circ}; \sqrt[4]{2}_{210^\circ}; \sqrt[4]{2}_{300^\circ}$
- 5) Pongan en forma binómica el número complejo: $\frac{5}{\sqrt{i}}$ **Solución:** $\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5i\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2}$
- 6) Hallen en forma polar: $\sqrt{4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$ **Solución:** $2_{15^\circ}; 2_{195^\circ}$
- 7) Hallen en forma polar: $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}}$ **Solución:** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- 8) Hallen las raíces de la ecuación: $z^3 + 1 = 0$ **Solución:** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 9) Calculen el módulo y argumento de las soluciones de la ecuación: $x^2 - \sqrt{12}x + 4 = 0$ y hallen el cociente de estas soluciones.
Solución: $|x_1| = 2; \alpha_1 = 30^\circ; \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $|x_2| = 2; \alpha_2 = 330^\circ$
- 10) Hallen en forma binómica: $\sqrt{1+2i\sqrt{2}}$ **Solución:** 1a. $\sqrt{2} + i; 2a. -\sqrt{2} - i$
- 11) Hallen en forma binómica: $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ **Solución:** 1a. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; 2a. -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- 12) Hallen los valores de a y b para las cuales se verifica: $\frac{a-1+bi}{a+bi+i} = 2$ **Solución:** $a = -1; b = -2$
- 13) Efectúen la operación siguiente: $2(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)^{10}$ **Solución:** $512 + 512\sqrt{3}i$
- 14) Hallen la ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $i; -i$. **Solución:** $x^2 + 1 = 0$
- 15) Hallen las raíces siguientes, expresando los resultados en forma polar, trigonométrica y binómica.
 - a) $\sqrt[3]{9}$ **Solución:** $\left\{ \begin{array}{l} (3, 0^\circ) = 3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 3 \\ (3, 180^\circ) = 3(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -3 \end{array} \right.$
 - b) $\sqrt[3]{-8}$ **Solución:** $\left\{ \begin{array}{l} (2, 60^\circ) = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3} \\ (2, 180^\circ) = 2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -2 \\ (2, 300^\circ) = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1 - i\sqrt{3} \end{array} \right.$

Evaluación

Nombre: _____ Punteo: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Primera serie:

Resuelve los problemas siguientes:

1. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula las restantes razones trigonométricas.
2. Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 600^\circ$.
3. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 105° observando que $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$.
4. Simplifica la expresión siguiente: $\frac{\operatorname{Sen} \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2 \alpha}$
5. Demuestra la igualdad siguiente: $\operatorname{Sen} (\alpha + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{2}$
6. Calcula el valor de la expresión siguiente: $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$.
7. Calcula $\operatorname{sen} 5 \alpha$, siendo $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$
8. Resuelve la ecuación $3 \operatorname{tg} x - 2 \cos x = 0$
9. Resuelve el triángulo $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 60^\circ$ y $b = 5 \text{ m}$.
10. Efectúa la operación $z_1 \div z_2 = (1 + i) \div (1 - i)$

11. Efectúa la operación $z_1 + z_2 = (4 + 2i) + (-1 + 3i)$
12. Halla C con la condición de que el producto $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(c + 6i)$ sea imaginario puro.
13. Halla b y d de manera que: $(3 + bi)(2 - di) = 12 - 5i$
14. Resuelve el triángulo: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 72^\circ$ y $a = 3$ cm.
15. Efectúa la operación siguiente y expresa el resultado en forma trigonométrica.
 $(2 + 2\sqrt{3}i) + (2\sqrt{3} + 2i)$
16. Resuelve el triángulo: $\alpha = 50^\circ$, $b = 6$ m y $a = 3$ m.
17. Calcula: $(1 + i\sqrt{3})^3$, por la fórmula Moivre.
18. Calcula: $(\sqrt{3} - i)^4$, expresando el resultado en forma polar y binómica.
19. Expresa en forma binómica: $\sqrt{3 + 4i}$

20. En el triángulo de la derecha, ¿cuál es el valor de a, α y γ ?

